

# Einführung in die **Theoretische Astrophysik**

Vorlesung an der Julius-Maximilians-Universität Würzburg  
Sommersemester 2014

**Prof. Dr. Friedrich Röpke**

ITPA

Lehrstuhl für Astronomie

Emil-Fischer-Str. 31

Büro 31.01.017

Tel. 84230

Email [friedrich.roepke@uni-wuerzburg.de](mailto:friedrich.roepke@uni-wuerzburg.de)

# Übungen

- ▶ Übungsleiter: Sebastian Ohlmann
- ▶ Übungsblätter und Folien zur Vorlesung unter [www.astro.uni-wuerzburg.de/~sohlmann/teaching](http://www.astro.uni-wuerzburg.de/~sohlmann/teaching)  
username: tastro  
password: wue14
- ▶ Ziel: Bearbeitung von 50% der Aufgaben (Teilaufgaben a, b usw zählen ganz)
- ▶ keine Abgabe von Lösungen, gelöste Aufgaben werden in der Übung angekreuzt und müssen vorgeführt werden können
- ▶ für Note: mündliche Prüfung am Ende des Semesters

# Literaturempfehlungen

## Lecture notes @ MPA:

- ▶ [www.mpa-garching.mpg.de](http://www.mpa-garching.mpg.de) → University Lectures and Seminars  
W. Hillebrandt, E. Müller: *Einführung in die Theoretische Astrophysik*,  
[www.mpa-garching.mpg.de/lectures/TASTRO\\_SS08](http://www.mpa-garching.mpg.de/lectures/TASTRO_SS08)
- ▶ ...and more
- ▶ M. Bartelmann: *Theoretical Astrophysics: An Introduction*, Wiley-VCH, 2012

## Advanced reading:

- ▶ T. Padmanabhan: *An Invitation to Astrophysics*, World Scientific, Singapore
- ▶ T. Padmanabhan: *Theoretical Astrophysics (Vol. I – III)*, Cambridge University Press
- ▶ R. Kippenhahn & A. Weigert: *Stellar Structure and Evolution*, Springer Berlin
- ▶ A. Weiss, W. Hillebrandt, H.-C. Thomas, & H. Ritter: *Cox & Giuli's Principles of Stellar Structure*, Cambridge Scientific Publishers (CSP) 2004
- ▶ Neb Duric: *Advanced Astrophysics*, Cambridge University Press

# Isaac Newton (1643 – 1727)



# Johannes Kepler (1571 – 1630)



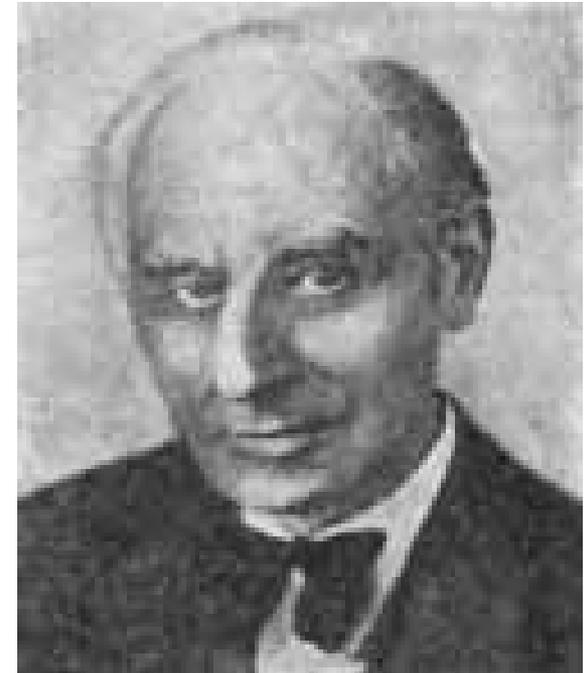
# Laplace, Runge, Lenz



Pierre-Simon Laplace  
(1749 – 1827)

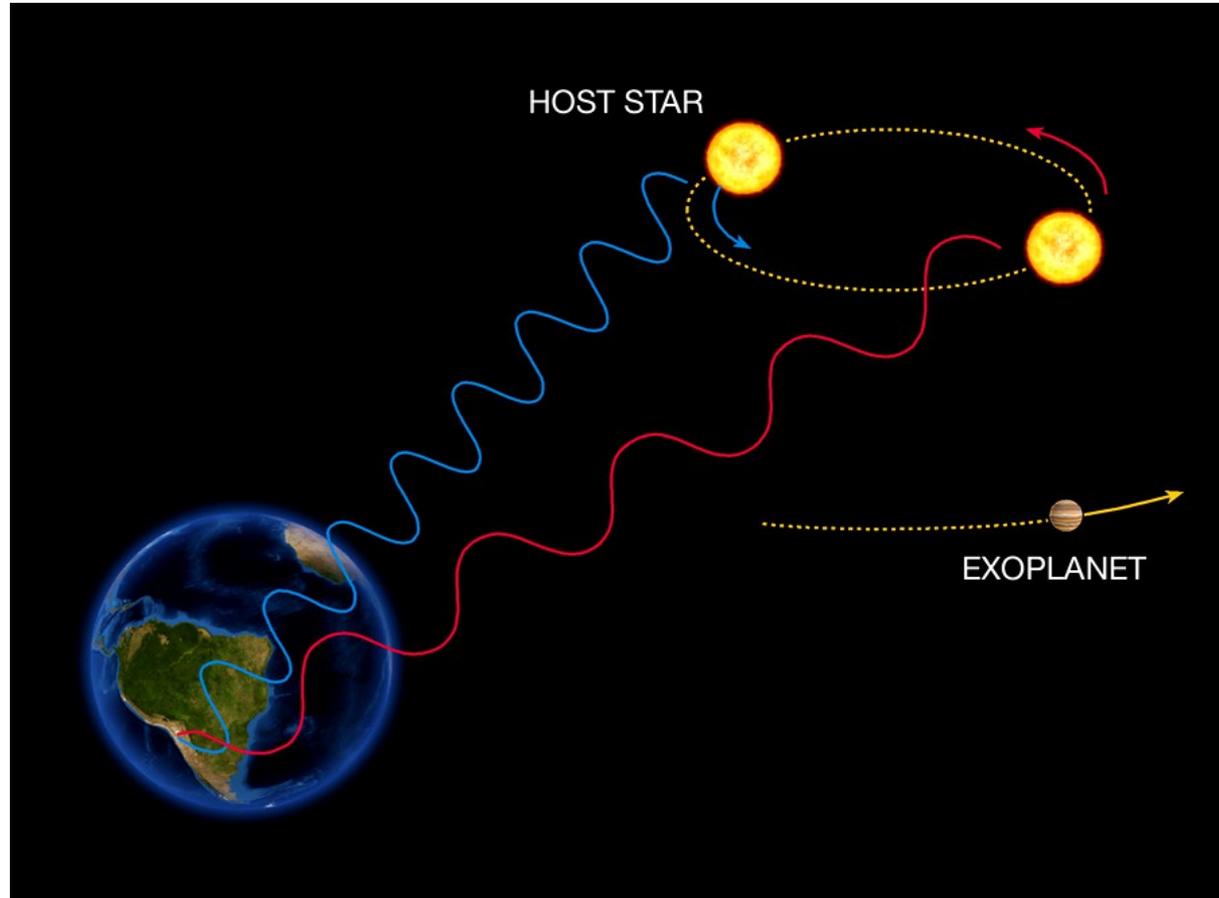


Carl Runge  
(1856 – 1927)



Wilhelm Lenz  
(1888 – 1957)

# Suche nach extrasolaren Planeten



The Radial Velocity Method

ESO Press Photo 22e/07 (25 April 2007)

This image is copyright © ESO. It is released in connection with an ESO press release and may be used by the press on the condition that the source is clearly indicated in the caption.



# Suche nach extrasolaren Planeten

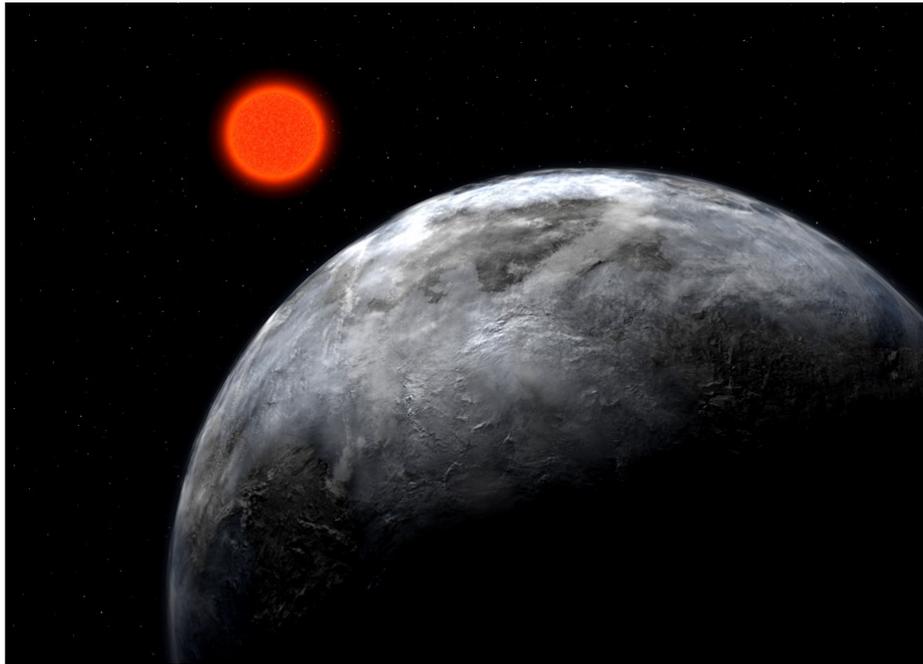


## ZWEITE ERDE

### Forscher melden Entdeckung eines bewohnbaren Planeten

Die Suche nach einer zweiten Erde war offenbar erfolgreich: Astronomen haben nach eigenen Angaben erstmals einen erdähnlichen, potentiell lebensfreundlichen Planeten in den Tiefen des Alls entdeckt. Auf seiner Oberfläche könnte angenehm temperiertes Wasser schwappen. Von Markus Becker [mehr...](#) [ Video ]

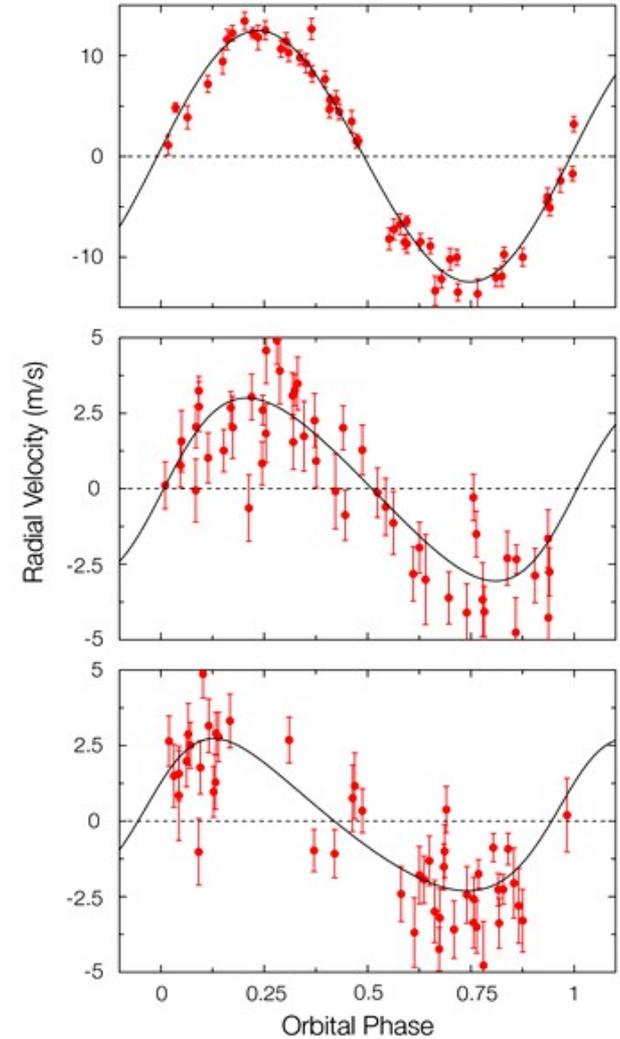
# Suche nach extrasolaren Planeten



A Super-Earth around Gliese 581  
(Artist's Impression)

ESO Press Photo 22b/07 (25 April 2007)

This image is copyright © ESO. It is released in connection with an ESO press release and may be used by the press on the condition that the source is clearly indicated in the caption.



Observed Velocity Variation of Gliese 581

ESO Press Photo 22d/07 (25 April 2007)

This image is copyright © ESO. It is released in connection with an ESO press release and may be used by the press on the condition that the source is clearly indicated in the caption.



# Dreikörperproblem



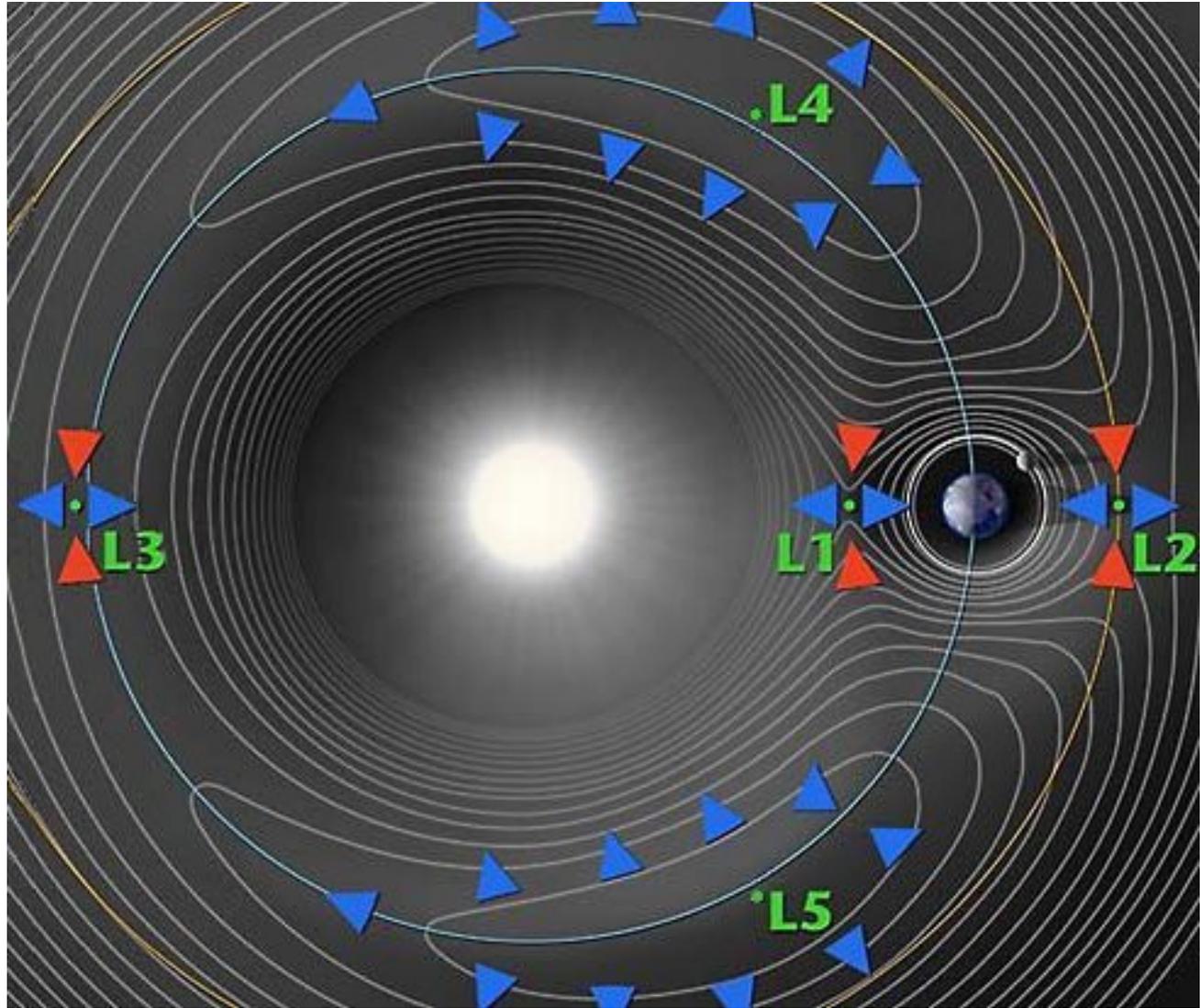
Joseph Louis Lagrange (1736 – 1813)

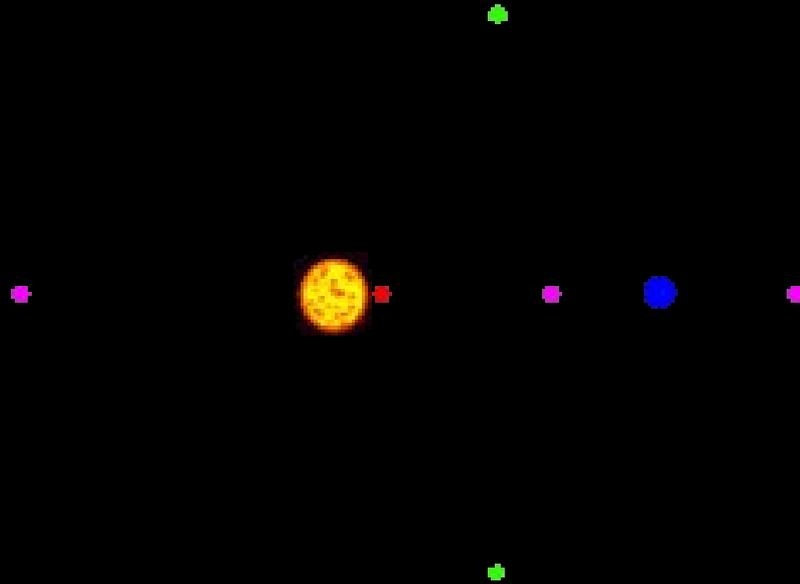


Henri Poincaré (1854 – 1912)

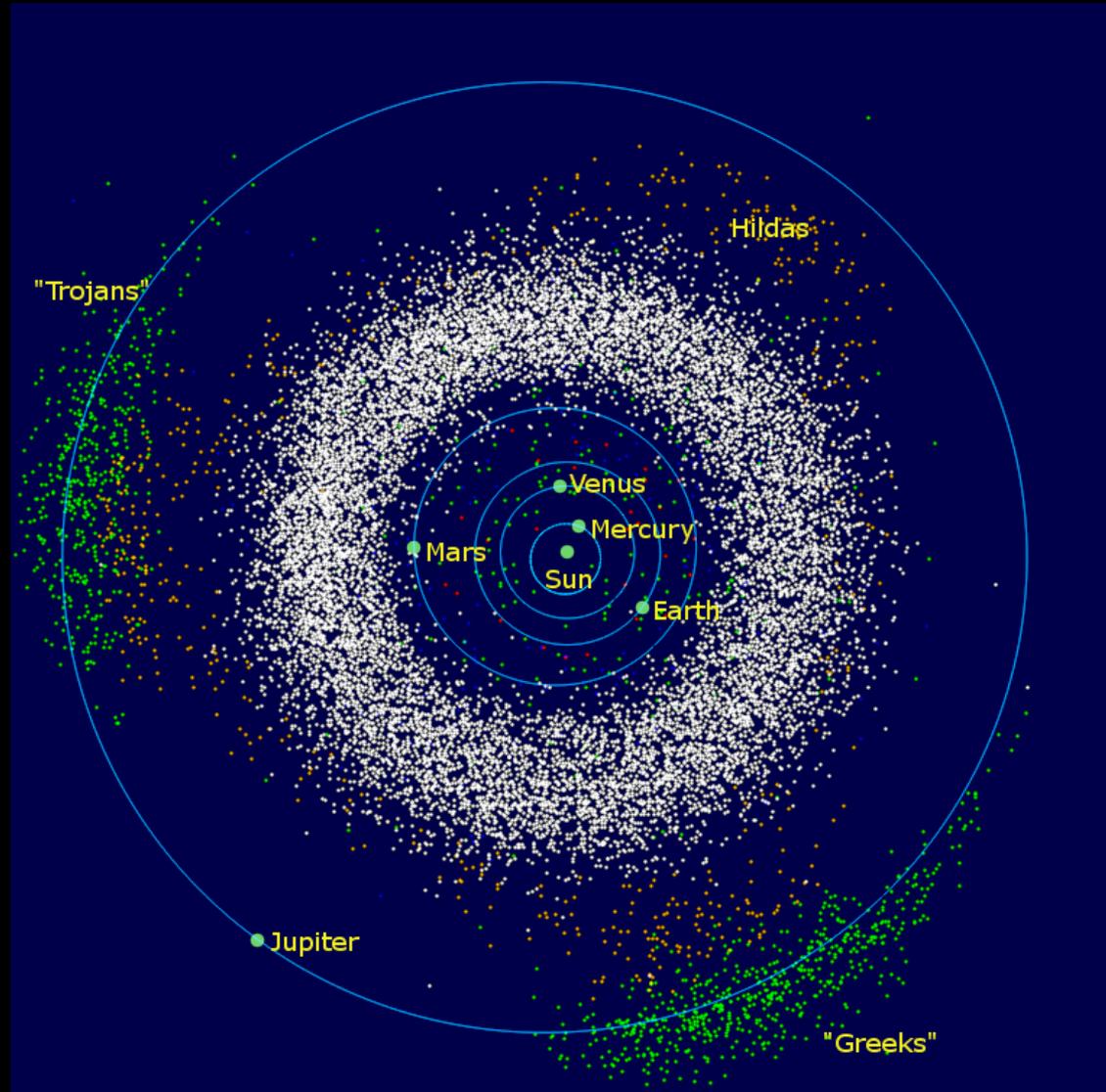
# Dreikörperproblem

# Lagrangepunkte





# Trojanische Asteroiden



# Rudolf Clausius (1822 – 1888)





Coma-Cluster



Fritz Zwicky (1898 – 1974)

# Ludwig Boltzmann (1844 – 1906)

Theoretische Astrophysik  
Sommersemester 2014



- ▶ Zustandsdichte

$$g(E) = \int dq dp \delta_D[E - H(q, p)], \quad S(E) \equiv \ln g(E)$$

- ▶ Kanonische Verteilung

$$\mathcal{P}(\epsilon) d\epsilon = \frac{d\epsilon}{Z} g(\epsilon) e^{-\beta\epsilon} = \frac{dp dq}{Z} e^{-\beta H(p, q)}$$

- ▶ Zustandssumme

$$Z(\beta) = \int_0^\infty g(\epsilon) e^{-\beta\epsilon} d\epsilon = \int dq dp e^{-\beta H(q, p)}$$

- ▶ Großkanonische Zustandssumme

$$G(\beta, \mu) = \sum_N e^{\beta\mu N} \int dq dp e^{-\beta E} = \sum_{N=0}^{\infty} e^{\beta\mu N} Z(N; \beta)$$

# Verbindung mit Thermodynamik

- ▶ Boltzmanns Entropieformel

$$S = \ln g(E) + q(N)$$

- ▶ Zustandssumme und (Helmholtz-) Freie Energie

$$F = -T \ln Z$$

- ▶ Großkanonische Zustandssumme und Thermodynamisches Potential

$$\Phi = -T \ln G$$

# Adiabatische Exponenten

$$\Gamma_1 \equiv \left( \frac{\partial \ln P}{\partial \ln \rho} \right)_S$$

$$\frac{\Gamma_2}{\Gamma_2 - 1} \equiv \left( \frac{\partial \ln P}{\partial \ln T} \right)_S \equiv \frac{1}{\nabla_{\text{ad}}}$$

$$\Gamma_3 - 1 \equiv \left( \frac{\partial \ln T}{\partial \ln \rho} \right)_S$$

# Stellare Konvektion



(c) Jérôme Ballot

# Karl Schwarzschild (1873 – 1916)



# Entartung

Beispiel: Teilchen in kubischer Box:  $V = L^3$

nicht-relativistische kinetische Energie:

▶ klassisch:  $\epsilon = \frac{p^2}{2m}$  → jeder beliebige Wert möglich

▶ quantenmechanisch:  $\epsilon = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2mL^2} (n_x^2 + n_y^2 + n_z^2)$

→ Energie ist quantisiert!

- ▶ Entartung → ein Energielevel kann zu verschiedenen Quantenzuständen gehören
- ▶ Unschärfeprinzip → Teilchen ununterscheidbar → total symmetrische/antisymmetrische Wellenfunktion Bosonen/Fermionen
- ▶ System in Kontakt mit Wärmebad → Wahrscheinlichkeit für Mikrozustand mit Energie  $E_r$ :

$$P_r = \frac{1}{Z} e^{-\beta E_r}; \quad Z = \sum_r e^{-\beta E_r} = \sum_n g_n e^{-\beta E_n}$$

- ▶ ideale Systeme: Satz von Besetzungszahlen der Quantenzustände  $\{n_j\}$  mit Energien  $\{\epsilon_j\}$ :

$$N = \sum_j n_j; \quad E = \sum_j \epsilon_j n_j$$

- ▶ (Quanten-)Zustandssumme:

$$Z(\beta, N) = \sum'_{\{n_j\}} \exp \left( -\beta \sum_j n_j \epsilon_j \right)$$

- ▶ Großkanonische Zustandssumme:  $\sum'$  with constraint  $\sum n_i = N$

$$G(z, \beta) = \sum_{N=0}^{\infty} z^N Z(\beta, N); \quad z = e^{\beta\mu}$$

- ▶ Zustandsgleichung:

$$\Phi = -PV = -\frac{1}{\beta} \ln Z_G = -\frac{1}{\beta a} \sum_{\epsilon} \ln \left[ 1 + a e^{\beta(\mu - \epsilon)} \right]$$

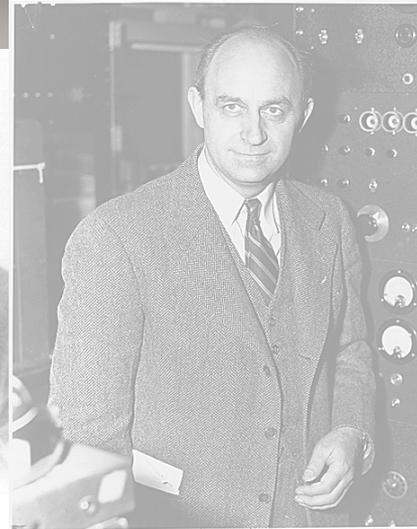
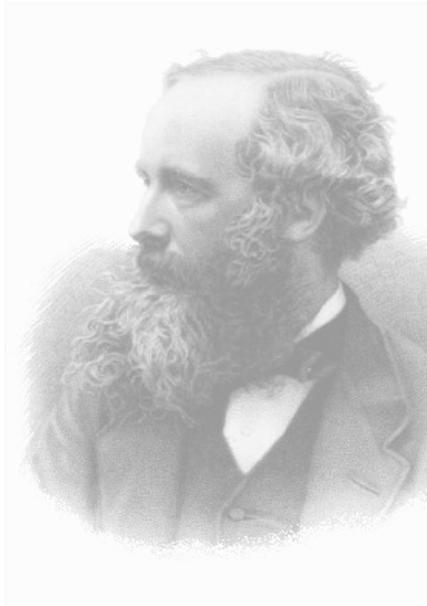
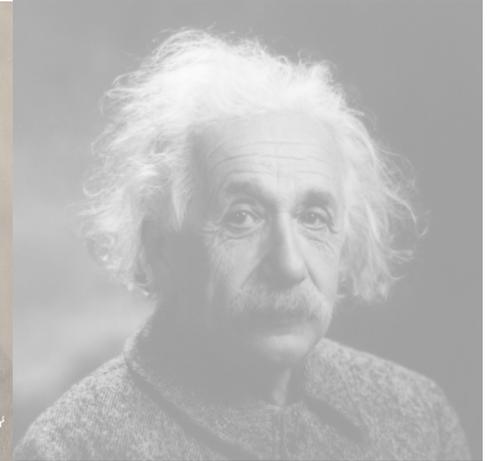
daraus:  $\langle N \rangle$  und  $\langle E \rangle$ ,  
mittl. Anzahl von Teilchen  $n(\epsilon)$   
mit Energie  $\epsilon$

$$a = \begin{cases} 1 & \text{Fermi-Dirac} \\ -1 & \text{Bose-Einstein} \\ 0 & \text{Maxwell-Boltzmann} \end{cases}$$

# Ideale Quantengase

$$n(\epsilon) = \frac{1}{e^{\beta(\epsilon - \mu)} + a}$$

$$a = \begin{cases} +1 & \text{Fermi-Dirac} \\ -1 & \text{Bose-Einstein} \\ 0 & \text{Maxwell-Boltzmann} \end{cases}$$



# Kontinuumslimit

- ▶ Einzelteilchen: Wellenzahlvektoren  $\vec{k} = \frac{\pi}{L}\vec{n}$
- ▶ Impulse  $\vec{p} = \frac{\pi\hbar}{L}\vec{n}$
- ▶ Anzahl der Mikrozustände zwischen  $\vec{p}$  und  $\vec{p} + d^3\vec{p}$  ist gegeben durch  $(\Delta n)^3 \equiv (\Delta n_x \Delta n_y \Delta n_z)$

$$d^3\vec{p} = \left(\frac{\pi\hbar}{L}\right)^3 (\Delta n_x \Delta n_y \Delta n_z) = \frac{(\pi\hbar)^3}{V} (\Delta n)^3$$

$$\Rightarrow (\Delta n)^3 = \frac{1}{8} \frac{V}{(\pi\hbar)^3} 4\pi p^2 dp = \frac{V}{(2\pi\hbar)^3} (4\pi p^2 dp)$$

- ▶ Korrespondenz  $d^3x d^3p \longrightarrow \frac{d^3x d^3p}{(2\pi\hbar)^3}$   
 im Phasenraum      Mikrozustände

(nur positiver Oktant trägt bei)

$$\sum_{\epsilon} (\dots) \longrightarrow \frac{4\pi}{(2\pi\hbar)^3} \int (\dots) p^2 dp$$

# Ideales Fermigas

Grenzfälle:

- ▶ Relativität  $p/(mc)$ 
  - $\ll 1$  nicht-relativistischer Grenzfall (NR) (i)
  - $\gg 1$  extrem-relativistischer Grenzfall (ER) (ii)
  
- ▶ Entartung  $\eta$ 
  - $-\infty$  nicht entartet, klass. Grenzfall (ND) (a)
  - $+\infty$  vollständig entartet (D) (b)

# Ideales Fermigas

- ▶ Energie der Teilchen (mit Ruhemassenenergie)
- ▶ Teilchendichte
- ▶ Energiedichte

# Ideales Fermigas

- Fermi-Integral:

$$F_n(\eta) \equiv \int_0^{\infty} \frac{x^n dx}{\exp(x - \eta) + 1}$$

Entartungsparameter:

$$\eta = \beta\mu = \frac{\mu}{k_B T}$$

(i) NR

$$n_{\text{NR}} = \frac{2\pi g_s}{h^3} (2mk_B T)^{3/2} F_{1/2}(\eta)$$

$$e_{\text{NR}} = \frac{2\pi g_s}{h^3} (2mk_B T)^{3/2} F_{3/2}(\eta)$$

$$P_{\text{NR}} = \frac{2}{3} e_{\text{NR}}$$

# Ideales Fermigas

(ia) NR, ND

$$n_{\text{NR}}^{\text{ND}} = \frac{g_s}{h^3} (2mk_{\text{B}}T)^{3/2} e^{\eta}$$

$$e_{\text{NR}}^{\text{ND}} = \frac{3}{2} n_{\text{NR}}^{\text{ND}} k_{\text{B}}T$$

$$P_{\text{NR}}^{\text{ND}} = n_{\text{NR}}^{\text{ND}} k_{\text{B}}T$$

(ib) NR, D

$$n_{\text{NR}}^{\text{D}} = \frac{4\pi g_s}{3h^3} (2mk_{\text{B}}T)^{3/2} \eta^{3/2}$$

$$e_{\text{NR}}^{\text{D}} = \frac{3h^2}{10m} \left( \frac{3}{4\pi g_s} \right)^{2/3} (n_{\text{NR}}^{\text{ND}})^{5/3}$$

$$P_{\text{NR}}^{\text{ND}} = \frac{2}{3} e_{\text{NR}}^{\text{D}}$$

Fermi-Energie

$$\varepsilon_{\text{F}} \equiv \mu = \frac{h^2}{2m} \left( \frac{3n_{\text{NR}}^{\text{D}}}{4\pi g_s} \right)^{2/3}$$

# Entartung

- ▶ D Grenzfall  $\eta \rightarrow \infty$  entspricht  $T \rightarrow 0$

$$n(E) = \frac{1}{\exp\left(\frac{E - \varepsilon_F}{k_B T}\right) + 1} \quad \Rightarrow \quad \lim_{T \rightarrow 0} n(E) = \begin{cases} 1 & (E < \varepsilon_F) \\ 0 & (E > \varepsilon_F) \end{cases}$$

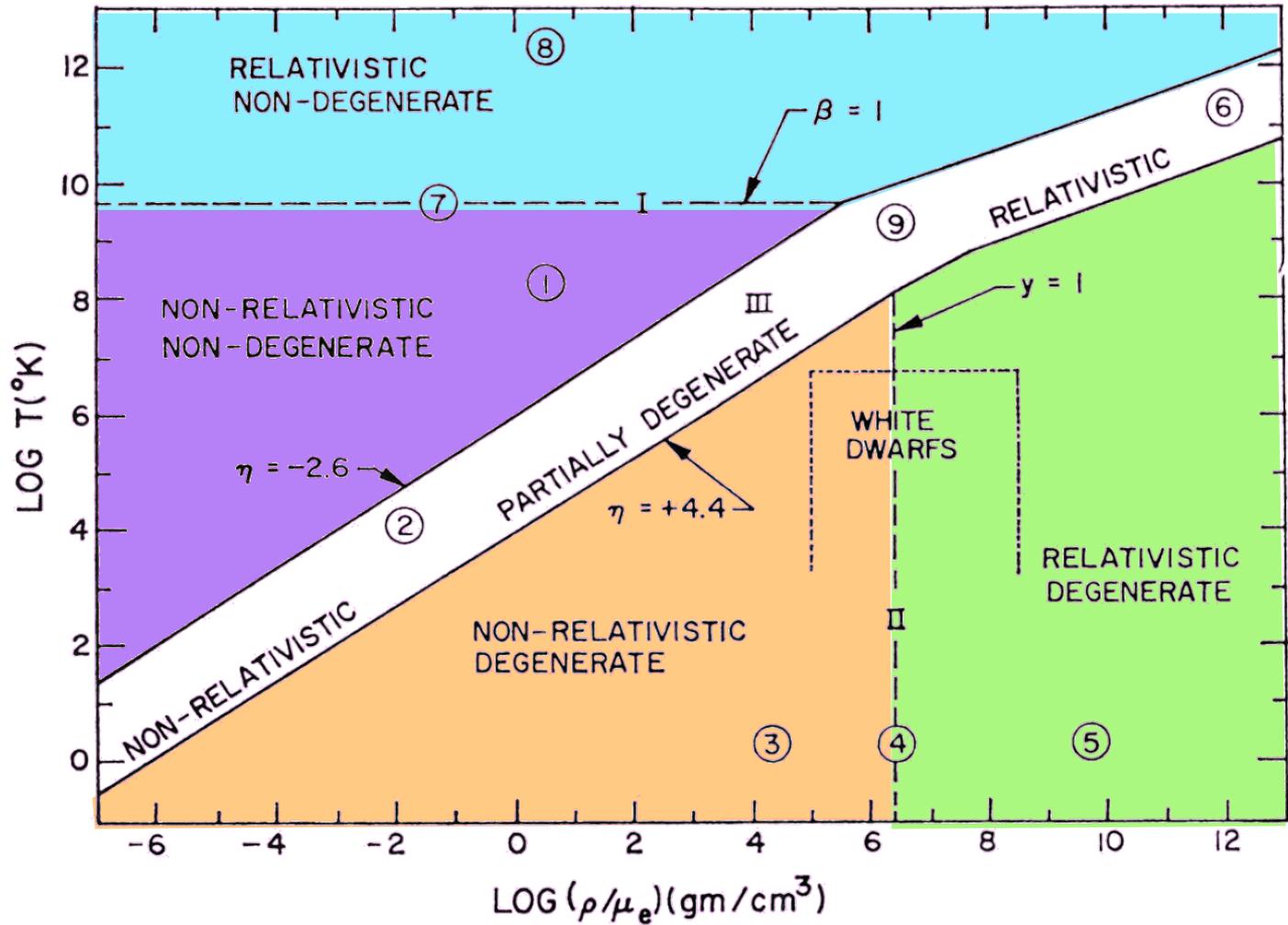
# Fermitemperaturen und -energien

Beispiel	$T_F$ [K]	$\epsilon_F$ [eV]
Elektronen in Metallen	$10^5$	$<10$
Neutronen in Kernen	$5.3 \times 10^{11} \times [(A-Z)/A]^{2/3}$	$46 [(A-Z)/A]^{2/3} \times 10^6$
Protonen in Kernen	$5.3 \times 10^{11} (Z/A)^{2/3}$	$46 (Z/A)^{2/3} \times 10^6$
Elektronen in Weißen Zwergsternen	$3 \times 10^9$	$3 \times 10^5$

# Ideales Fermigas: Grenzfälle

Grenzfall	allgemein	ND	D
NR	$P = 2/3 e$	$P = nk_B T$	$P \propto (Y_F \rho)^{5/3}$
ER	$P = 1/3 e$	$P = nk_B T$	$P \propto (Y_F \rho)^{4/3}$

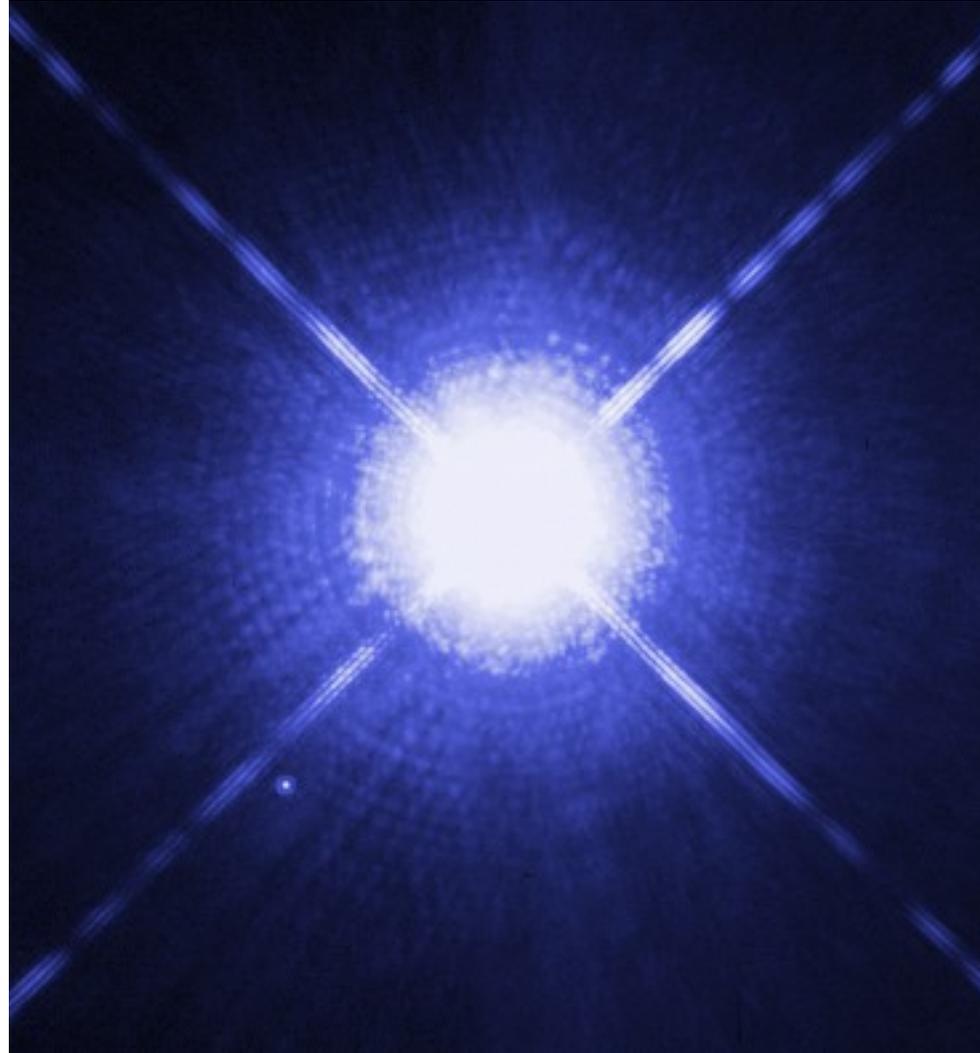
# Ideales Fermigas



Cox & Giuli (1968/2004)

# Weißer Zwergsterne (WDs)

Sirius A und B

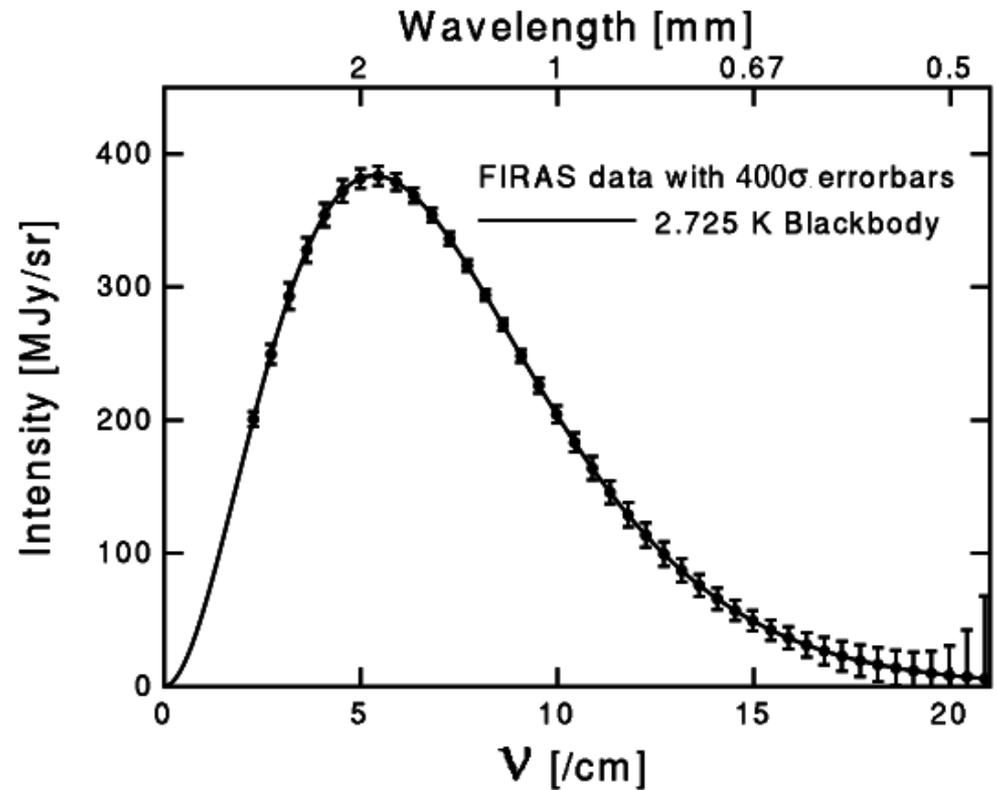


# Historische Bemerkung zu WDs

- ▶ **1834:** Bessel (1784 – 1846) entdeckt Pekuliarbewegung von Sirius → interpretiert als Binärsystem mit unsichtbarem Begleitstern
- ▶ **1862:** A. G. Clark findet Begleiter (Sirius B) nahe des vorhergesagten Orts; aus Orbitaleigenschaften:  $M \sim 1M_{\odot}$ ,  $L \sim 1/400 L_{\odot}$
- ▶ **1915:** Adams bestimmt Spektraltyp (F) of Sirius B:  $T \sim 8500\text{K}$ ,  $R \sim R_{\odot}/55$
- ▶  $\langle \rho \rangle \sim 61000 \text{ g/cm}^3$
- ▶ **1924:** A.S. Eddington formuliert Paradoxon: hohe Dichte nur möglich bei vollständiger Ionisierung, d.h. hohen Temperaturen → was passiert, wenn Stern kühlt und nicht länger ionisiert ist?
- ▶ **1925:** Adams mißt gravitative Rotverschiebung von Sirius B ( $v_R \sim 20 \text{ km/s}$ ); bestätigt Vorhersagen der ART und hoher mittl. Dichte von Sirius B
- ▶ **1926:** R.H. Fowler löst Eddington's Paradoxon: vollständige Ionisierung nicht nur bei hoher T sondern auch möglich bei  $T \rightarrow 0$ , wenn Druck hoch genug (Druckionisierung); wegen Pauli-Prinzip, F-D Statistik: Entartung unterstützt Stern gegen Kollaps

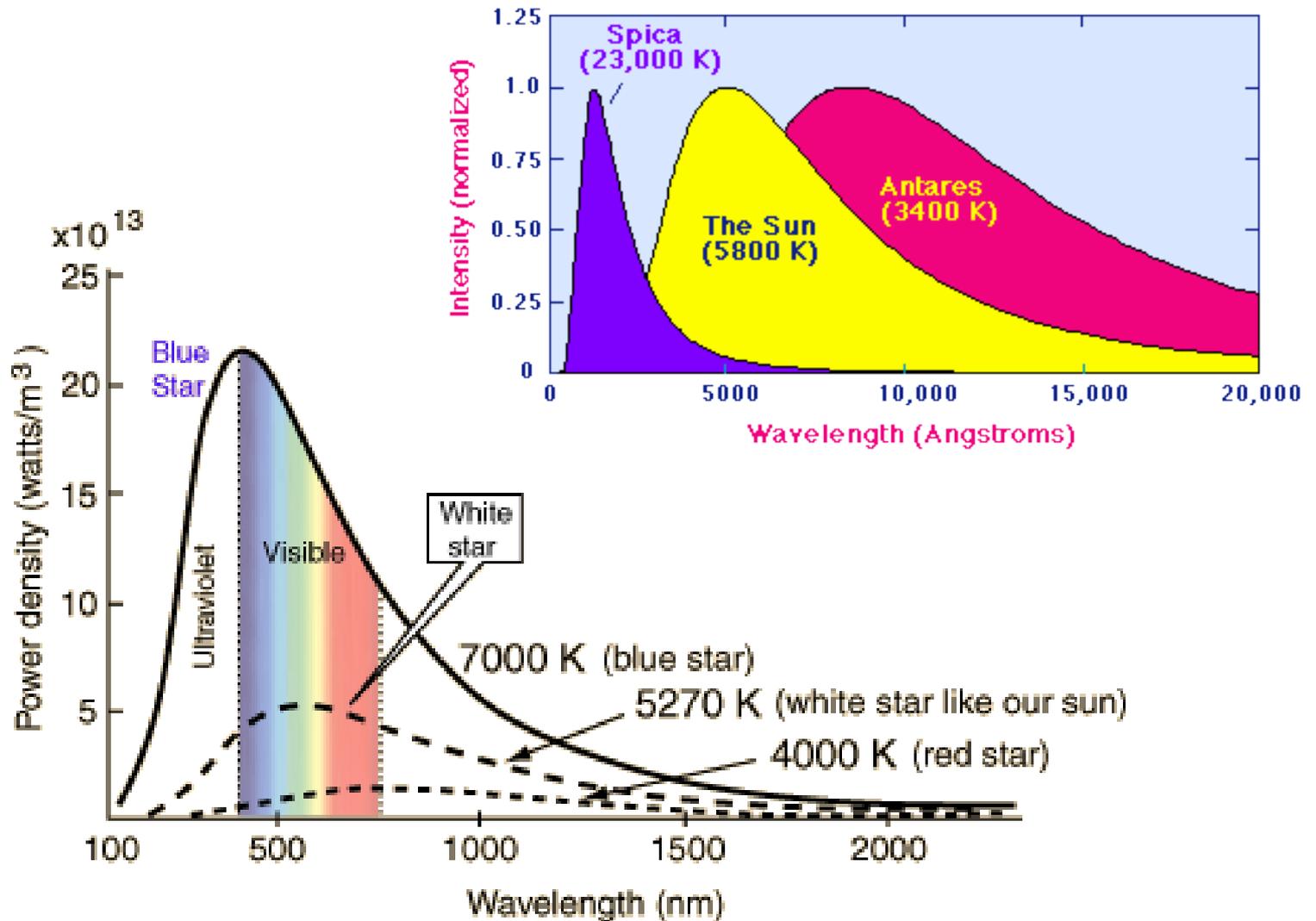
# Planck-Spektrum

Max Planck (1858 – 1947)



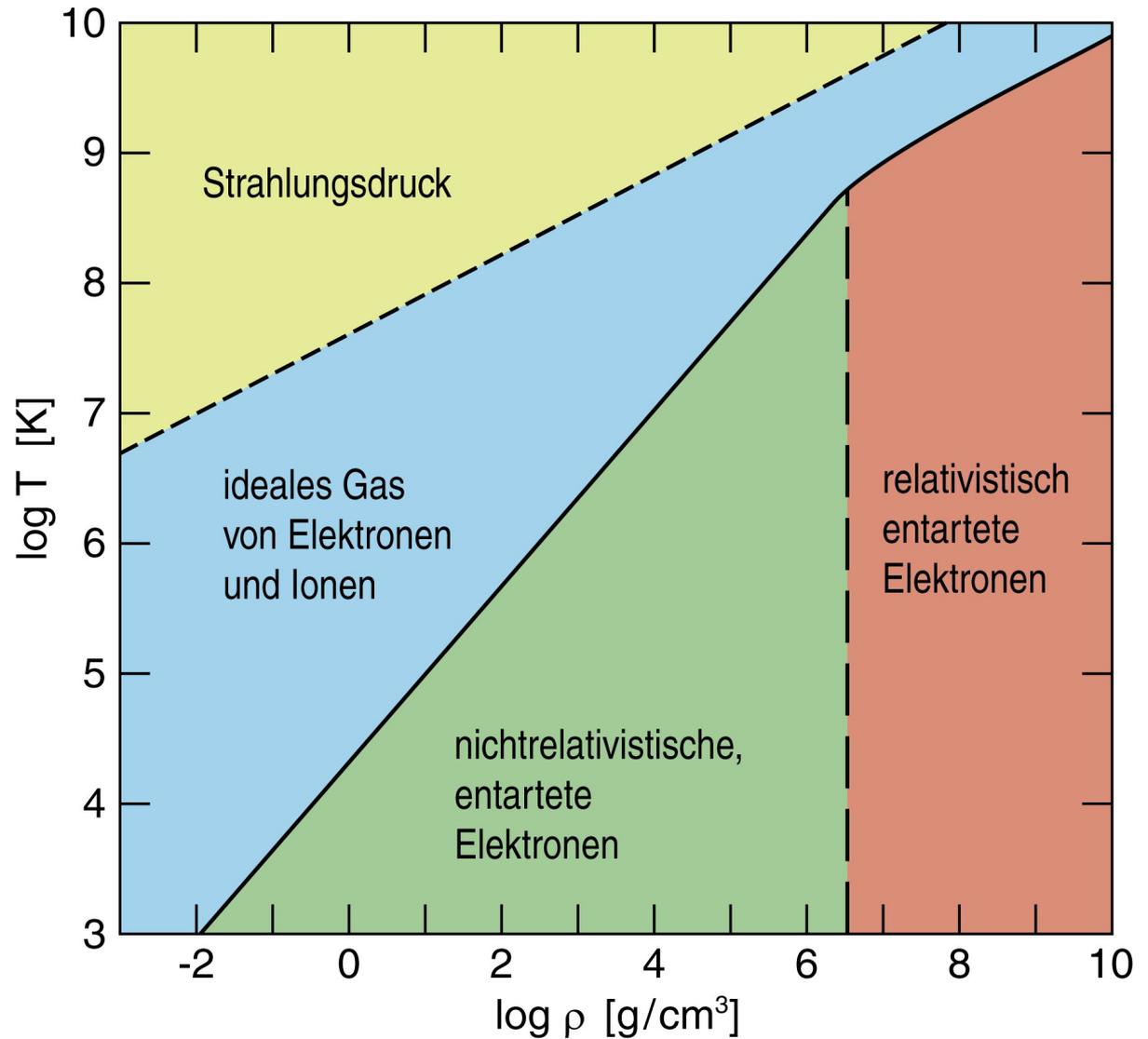
CMB Leistungsspektrum (COBE Satellit)

# Wiensches Verschiebungsgesetz



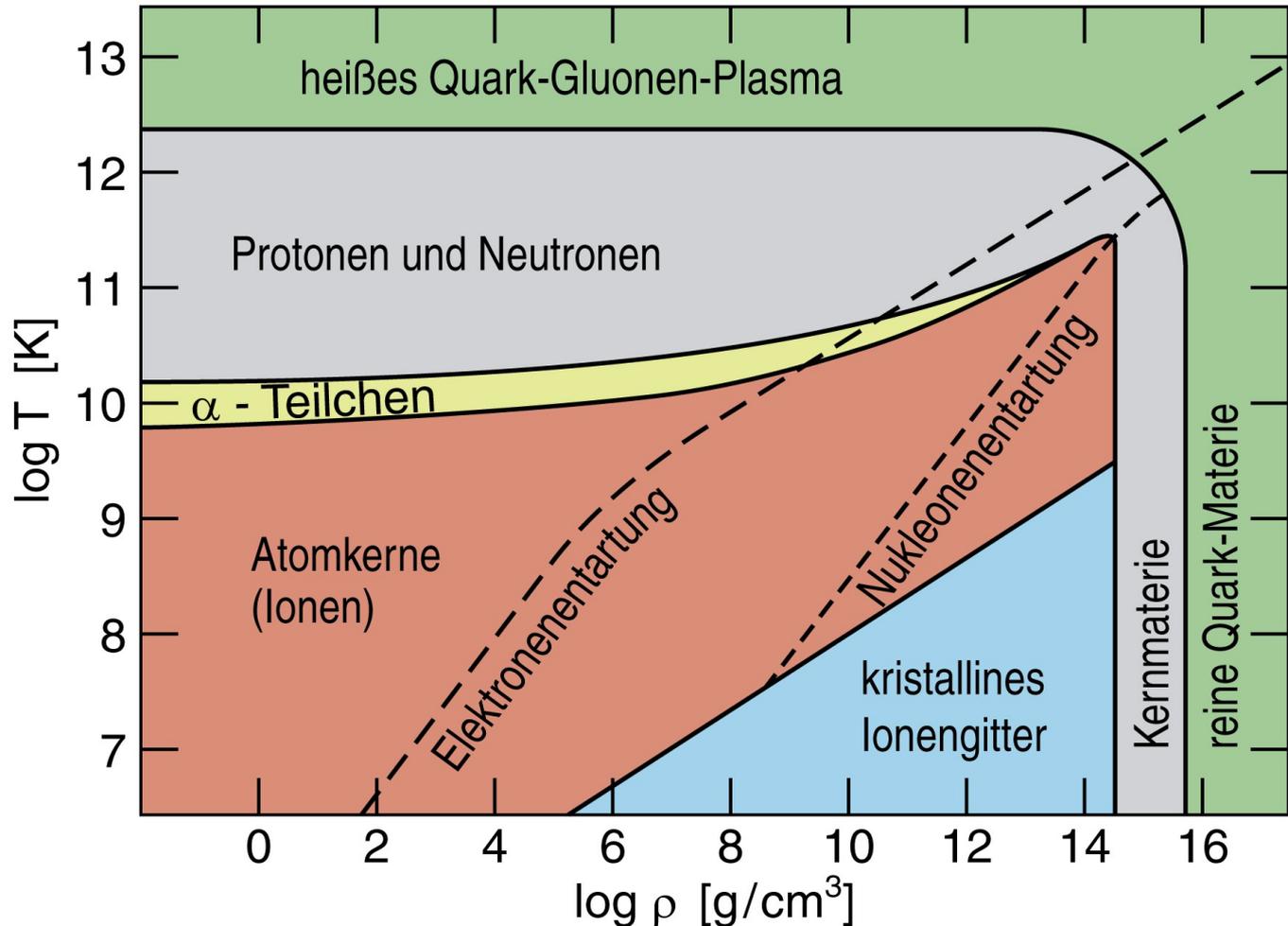
# Astrophysikalische Zustandsgleichung

(gezeigt:  
Anteil, der  
den Druck  
dominiert!)



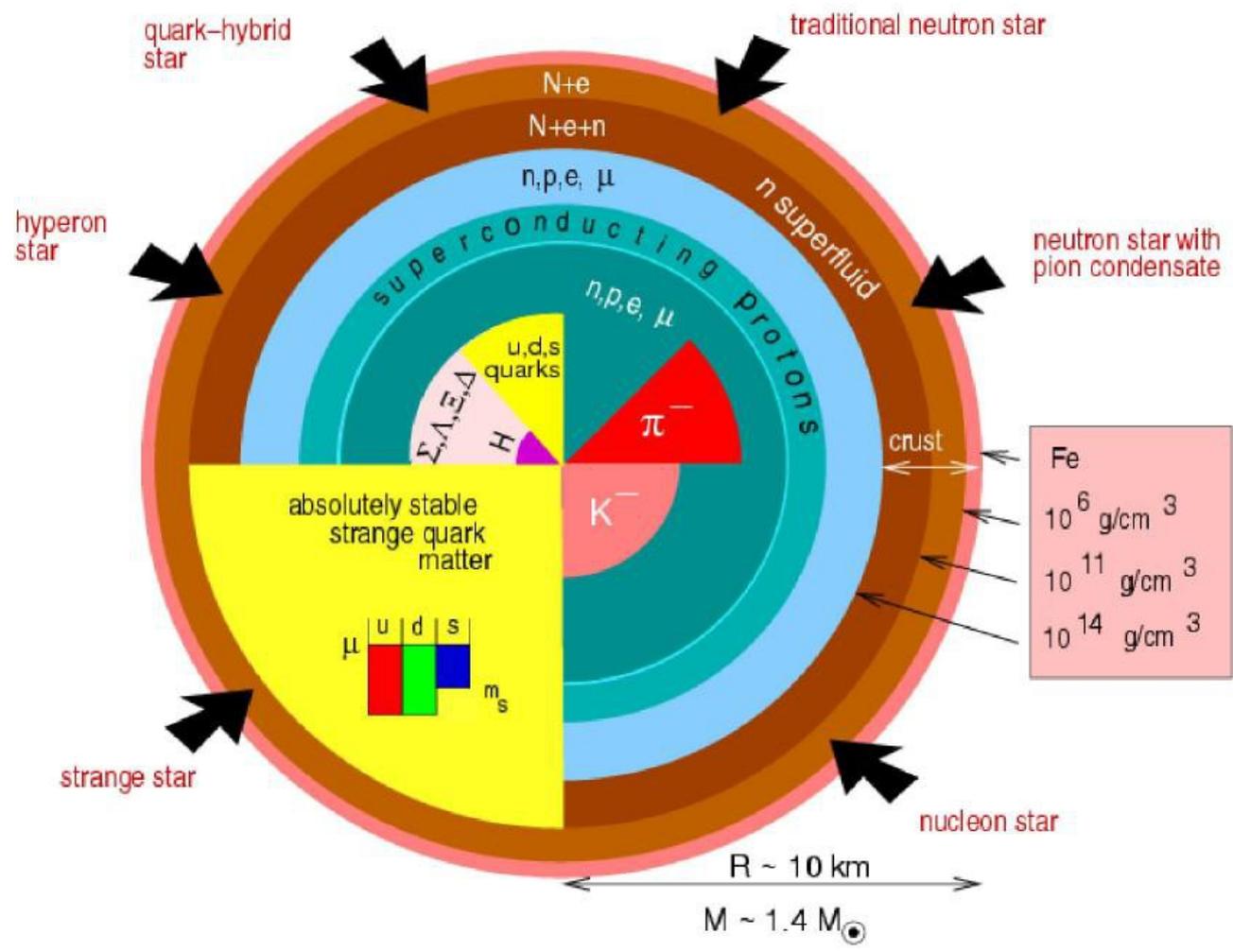
# Zust.Gl. unter extremen Bedingungen

(gezeigt ist Komposition der Materie!)



# Zustandsgleichung Neutronenstern

Theoretische Astrophysik  
Sommersemester 2014



# Astrophysikalische Gleichgewichte

- ▶ 1. HS Thd im GGW:

$$d\left(\frac{\varepsilon}{n}\right) = -Pd\left(\frac{1}{n}\right) + Tds$$

- ▶ bei Gasgemischen: Abhängigkeit von Komposition

$$d\left(\frac{\varepsilon}{n}\right) = -Pd\left(\frac{1}{n}\right) + Tds + \sum_i \mu_i dY_i$$

Häufigkeit der Spezies  $i$ :

$$Y_i \equiv \frac{n_i}{n}$$

chemisches Potential:

$$\mu_i \equiv \frac{\partial\left(\frac{\varepsilon}{n}\right)}{\partial Y_i} = \frac{\partial\varepsilon}{n_i}$$

# Astrophysikalische Gleichgewichte

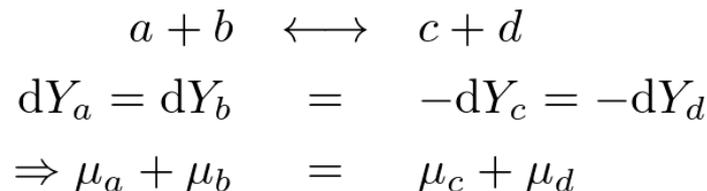
- ▶ System thermisch isoliert ( $\delta Q = 0$ ),  $V = \text{const} \rightarrow dn = 0$ , infinitesimal dicht am GGW:  $ds = 0$  (in erster Ordnung, nach 2. HS Thd)

$$\Rightarrow d\left(\frac{\varepsilon}{n}\right) = 0$$

- ▶ mit 1. HS Thd folgt daraus **die Gleichgewichtsrelation**

$$\sum_i \mu_i dY_i = 0$$

- ▶ Beispiel: Reaktion



# Sternaufbaugleichungen

- ▶ 1. Sternaufbaugleichung:

$$\frac{dm(r)}{dr} = 4\pi r^2 \rho(r)$$

- ▶ 2. Sternaufbaugleichung (hydrostatisches Gleichgewicht):

$$\frac{dP(r)}{dr} = -\frac{Gm(r)}{r^2} \rho(r)$$

# Polytropen

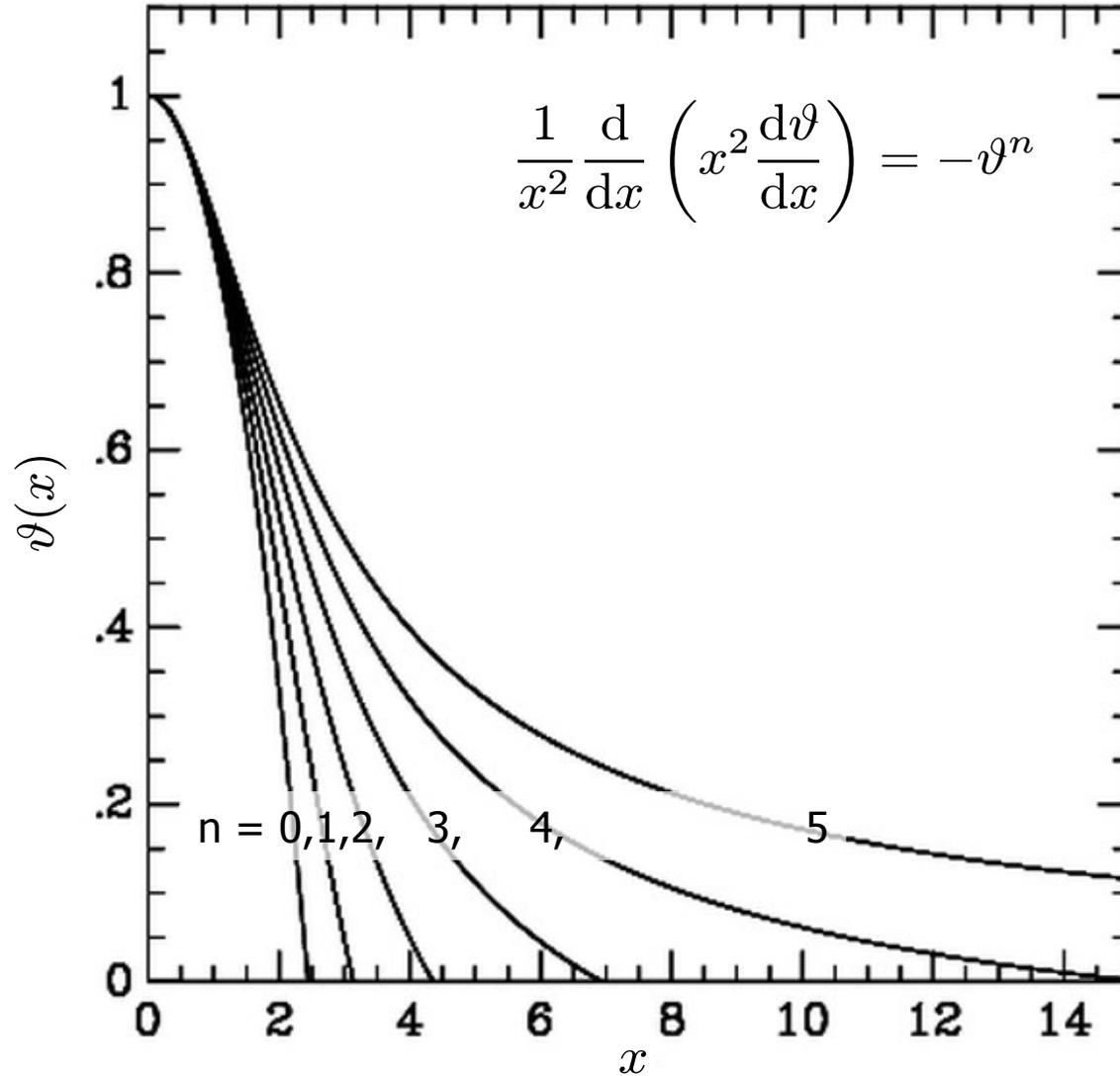
- ▶ Polytrope:

$$P(r) = K\rho(r)^{1+\frac{1}{n}}$$

- ▶ Lane-Emden-Gleichung:

$$\frac{1}{x^2} \frac{d}{dx} \left( x^2 \frac{d\vartheta}{dx} \right) = -\vartheta^n$$

# Lösungen der Lane-Emden-Gleichung



## Historische Bemerkung zu WDs (II)

- ▶ 1926: R.H. Fowler löst Eddington's Paradoxon: vollständige Ionisierung nicht nur bei hoher  $T$ , sondern auch  $T \rightarrow 0$ , wenn  $P$  hoch (Druckionisierung); Pauli-Prinzip  $\rightarrow$  FD-Statistik: Entartung stabilisiert Stern gegen Kollaps
- ▶ 1931: S. Chandrasekhar verallgemeinert Fowlers Modell unter Berücksichtigung der SRT  $\rightarrow$  relativistische Entartung  $\rightarrow$  Massengrenze für WDs
- ▶ Beginn der Kontroverse mit Eddington, der behauptet, dass relativist. Entartung nicht existiert und es demzufolge keine Massengrenze gibt  
Chandrasekhar sucht Unterstützung von bekannten Physikern (u.a. Bohr und Pauli), aber diese äußern sich nicht öffentlich
- ▶ 1939: Chandrasekhar beendet den Disput mit Eddington und schreibt sein Buch "An Introduction to the Study of Stellar Structure". Die Kontroverse endet mit Eddingtons Tod.  
1983 erhält Chandrasekhar den Nobelpreis.



# Lane-Emden-Funktionen

- ▶ S. Chandrasekhar: "An Introduction to the Study of Stellar Structure" (1939, 1958)

TABLE 4

THE CONSTANTS OF THE LANE-EMDEN FUNCTIONS\*

$n$	$\xi_1$	$-\xi_1^2 \left( \frac{d\theta_n}{d\xi} \right)_{\xi=\xi_1}$	$\rho_c / \bar{\rho}$	$\omega_n = -\xi_1^{n+1} \left( \frac{d\theta_n}{d\xi} \right)_{\xi=\xi_1}$	$N_n$	$W_n$	$\frac{1}{n}$
0.....	2.4494	4.8988	1.0000	0.33333	.....	0.119366	
0.5.....	2.7528	3.7871	1.8361	0.02156	2.270	0.26227	
1.0.....	3.14159	3.14159	3.28987	.....	0.63662	0.392699	
1.5.....	3.65375	2.71406	5.99071	132.3843	0.42422	0.770140	
2.0.....	4.35287	2.41105	11.40254	10.4950	0.36475	1.63818	
2.5.....	5.35528	2.18720	23.40646	3.82662	0.35150	3.90906	
3.0.....	6.89685	2.01824	54.1825	2.01824	0.36394	11.05066	
3.25.....	8.01894	1.94980	88.153	1.54716	0.37898	20.365	
3.5.....	9.53581	1.89056	152.884	1.20426	0.40104	40.9098	
4.0.....	14.97155	1.79723	622.408	0.729202	0.47720	247.558	
4.5.....	31.83646	1.73780	6189.47	0.394356	0.65798	4922.125	
4.9.....	169.47	1.7355	934800	0.14239	1.340	3.693 × 10 <sup>6</sup>	
5.0.....	∞	1.73205	∞	0	∞	∞	

\*The values for  $n = 0.5$  and  $4.9$  are computed from Emden's integrations of  $\theta_n$ ; for  $n = 3.25$  an unpublished integration by Chandrasekhar has corresponds to the Schuster-Emden integral. For the other values of  $n$  the *British Association Tables*, Vol. II, has been used.

# Chandrasekhar-Masse

- ▶ ideales Fermigas, Fall iib) ER, D:

$$n_{\text{ER}}^{\text{D}} = \frac{4}{3} \pi g_s \frac{k_{\text{B}} T^3}{hc} \eta^3$$

$$\rho = n_e \frac{A}{Z} m_{\text{B}} \equiv n_e \mu_e m_{\text{B}} \quad \rightarrow \quad n_e = \frac{\rho}{\mu_e m_{\text{B}}}$$

$$P_{\text{ER}}^{\text{D}} = \frac{1}{4} \left( \frac{3}{4\pi g_s} \right)^{1/3} hc (n_{\text{ER}}^{\text{D}})^{4/3}$$

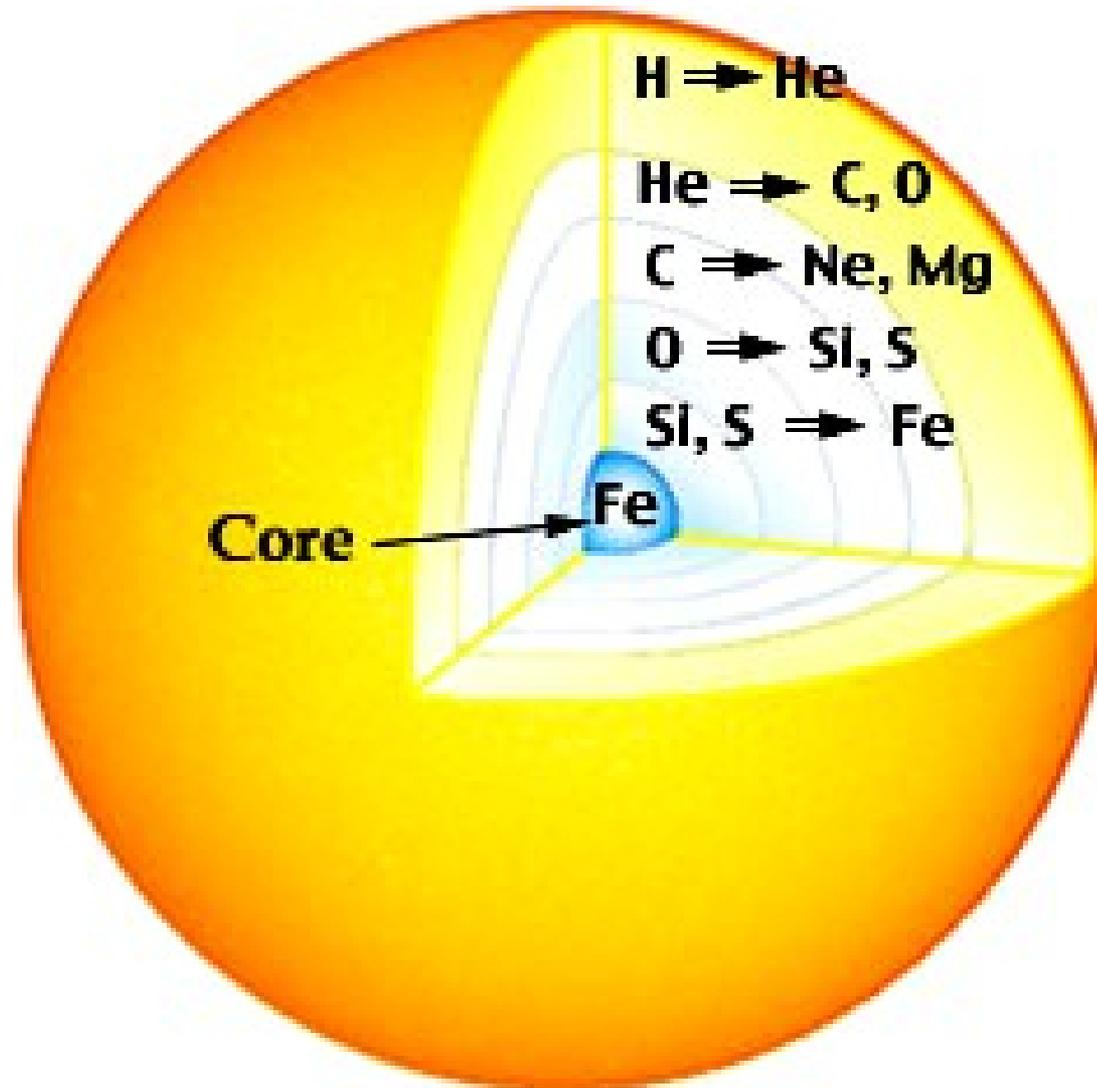
$$P = \frac{1}{4} \left( \frac{3}{8\pi} \right)^{1/3} hc \left( \frac{1}{\mu_e m_{\text{B}}} \right)^{4/3} \rho^{4/3} \quad (g_s = 2)$$

$$\rightarrow K_{\text{Ch}} = \left( \frac{3}{\pi} \right)^{1/3} \frac{hc}{8} \left( \frac{1}{\mu_e m_{\text{B}}} \right)^{4/3}$$

# Nukleare Brennphasen in Sternen

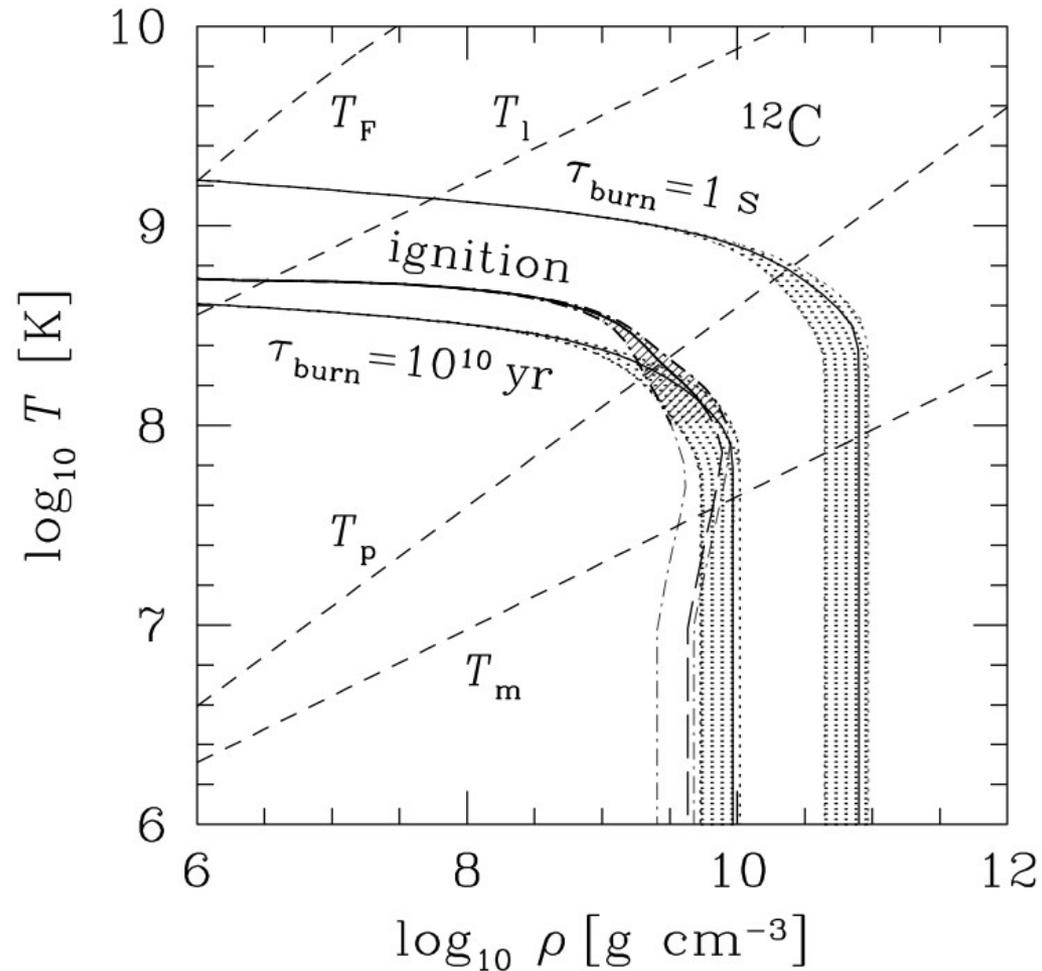
Brennphase	Brennstoff	Asche	Zündtemperatur [ $10^9$ K]	Energiefreisetzung [ $10^{18}$ erg/g]	Kühlung durch
D-Brennen	$^2\text{H}$	$^3\text{He}$	0.0004	$\sim 0.0001$	$\gamma$
H-Brennen	$^1\text{H}$	$^4\text{He}, ^{14}\text{N}$	0.003	5—8	$\gamma$
He-Brennen	$^4\text{He}$	$^{12}\text{C}, ^{16}\text{O}, ^{22}\text{Ne}$	0.2	0.7	$\gamma$
C-Brennen	$^{12}\text{C}$	$^{20}\text{Ne}, ^{24}\text{Mg}, ^{16}\text{O}, ^{23}\text{Na}$	0.8	0.5	$\nu$
Ne-Brennen	$^{20}\text{Ne}$	$^{16}\text{O}, ^{24}\text{Mg}, ^{28}\text{Si}, \dots$	1.5	0.1	$\nu$
O-Brennen	$^{16}\text{O}$	$^{28}\text{Si}, ^{32}\text{S}$	2	0.5	$\nu$
Si-Brennen	$^{28}\text{Si}$	$^{56}\text{Ni}, A \approx 56$	3.5	0.1—0.3	$\nu$
Photo-disintegration	$^{56}\text{Ni}$	$n, ^4\text{He}, p$	6—10	— 8	$\nu$

# Struktur entwickelter massereicher Sterne



# $^{12}\text{C}$ ignition curve

- ▶ from Gasques et al., Phys. Rev. C 72, 025806 (2005)



# Homologe Entwicklung von Sternen

- ▶ Zustandsgleichung  $\rho \propto P^\alpha T^{-\delta}$

- ▶ homologe Entwicklung impliziert

$$\frac{d \ln T}{d \ln \rho} = \frac{4\alpha - 3}{3\delta}$$

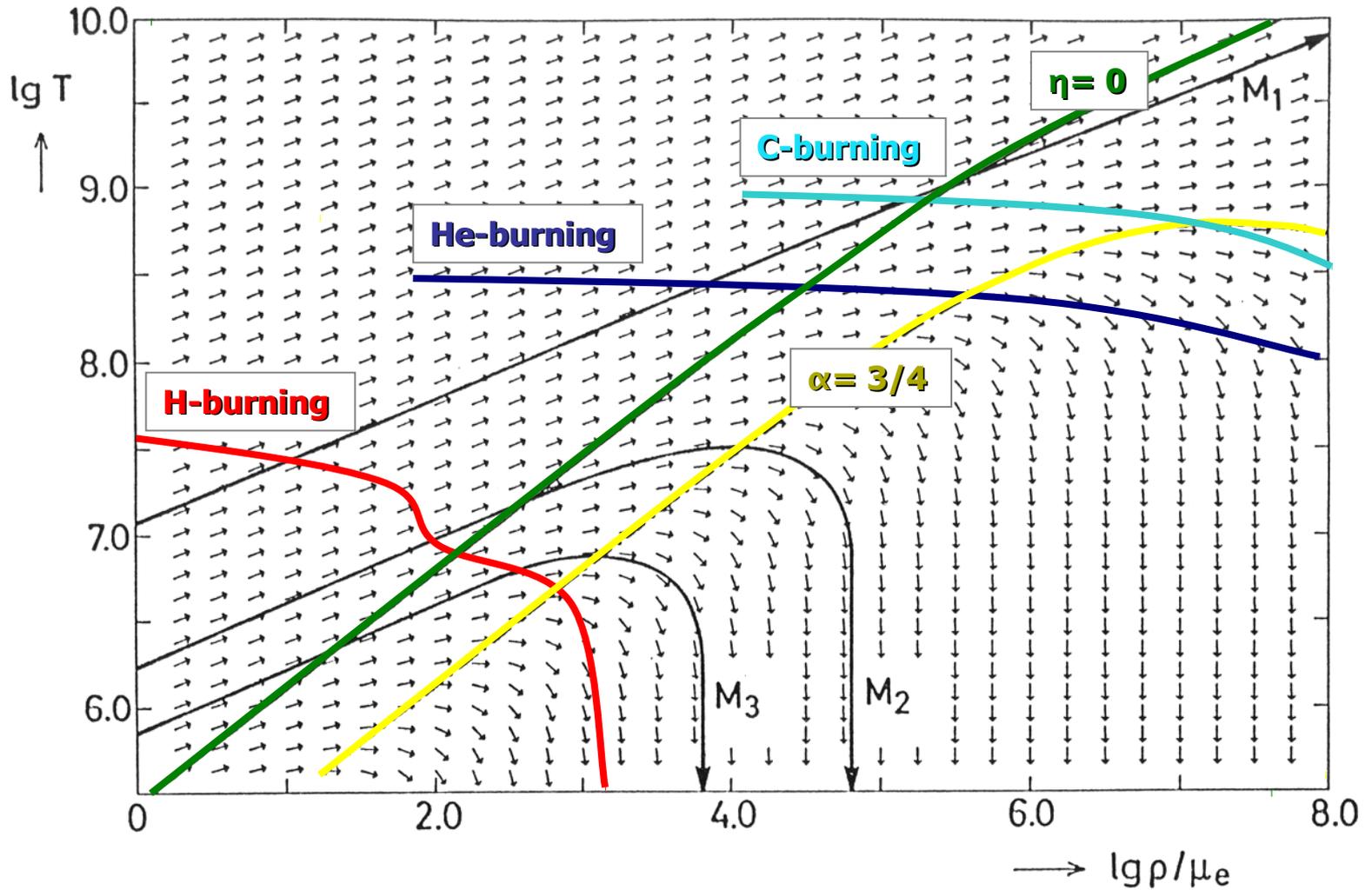
- ▶ ideales Gas

$$\alpha = 1, \quad \delta = 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{d \ln T}{d \ln \rho} = \frac{1}{3}$$

- ▶ entartetes Gas

$$\alpha \in \left[ \frac{3}{5}, \frac{3}{4} \right], \quad \delta \approx 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{d \ln T}{d \ln \rho} < 0$$

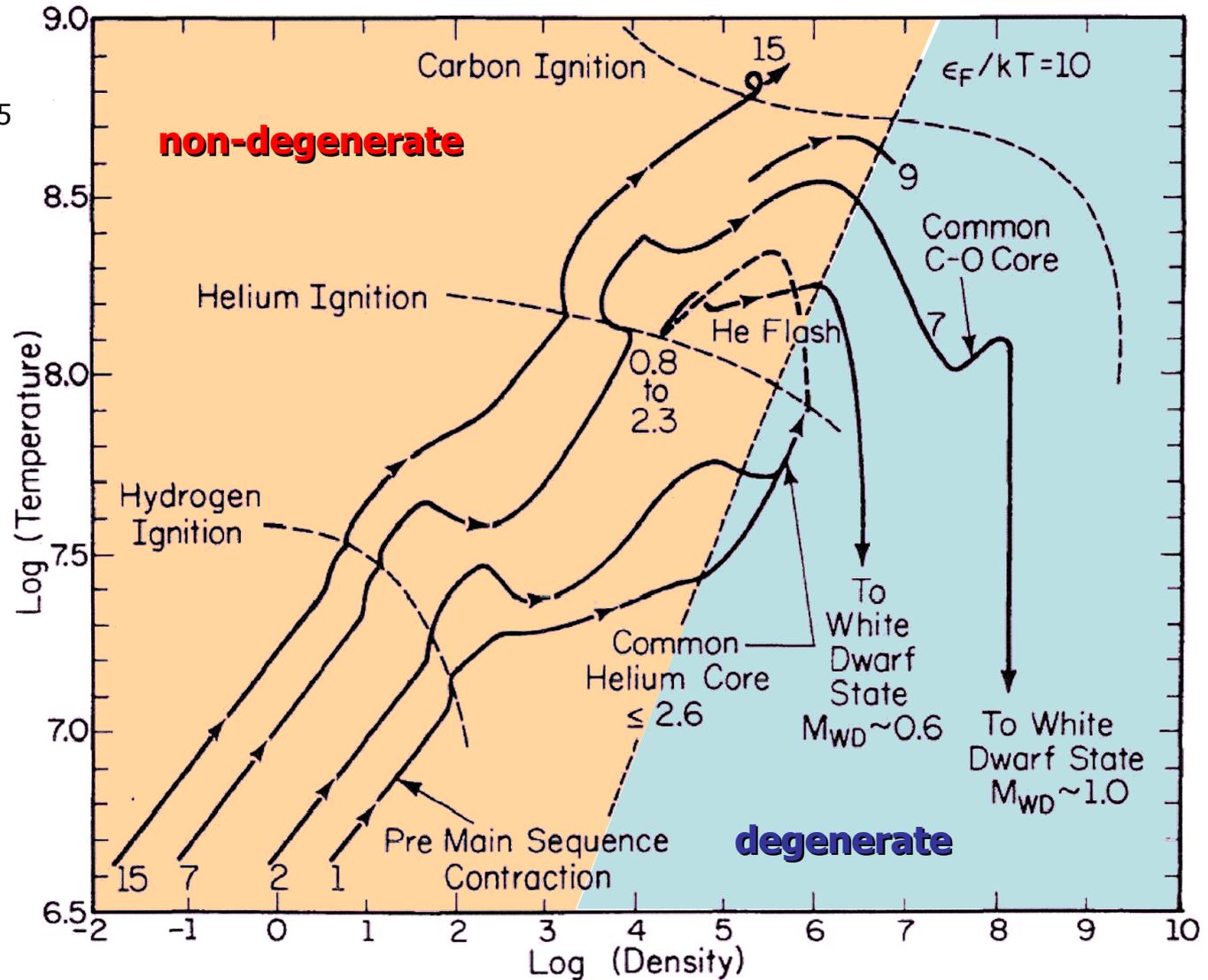
# Entwicklungspfade



- ▶  $M_1 > M_2 > M_3$  (Abbildung aus Kippenhahn & Weigert)

# Sternentwicklung

Iben (1991)  
ApJ Suppl 76, 55



# Leonhard Euler (1707—1783)



# Die Eulergleichungen

- ▶ Massenerhaltung

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\nabla \cdot (\rho \vec{v})$$

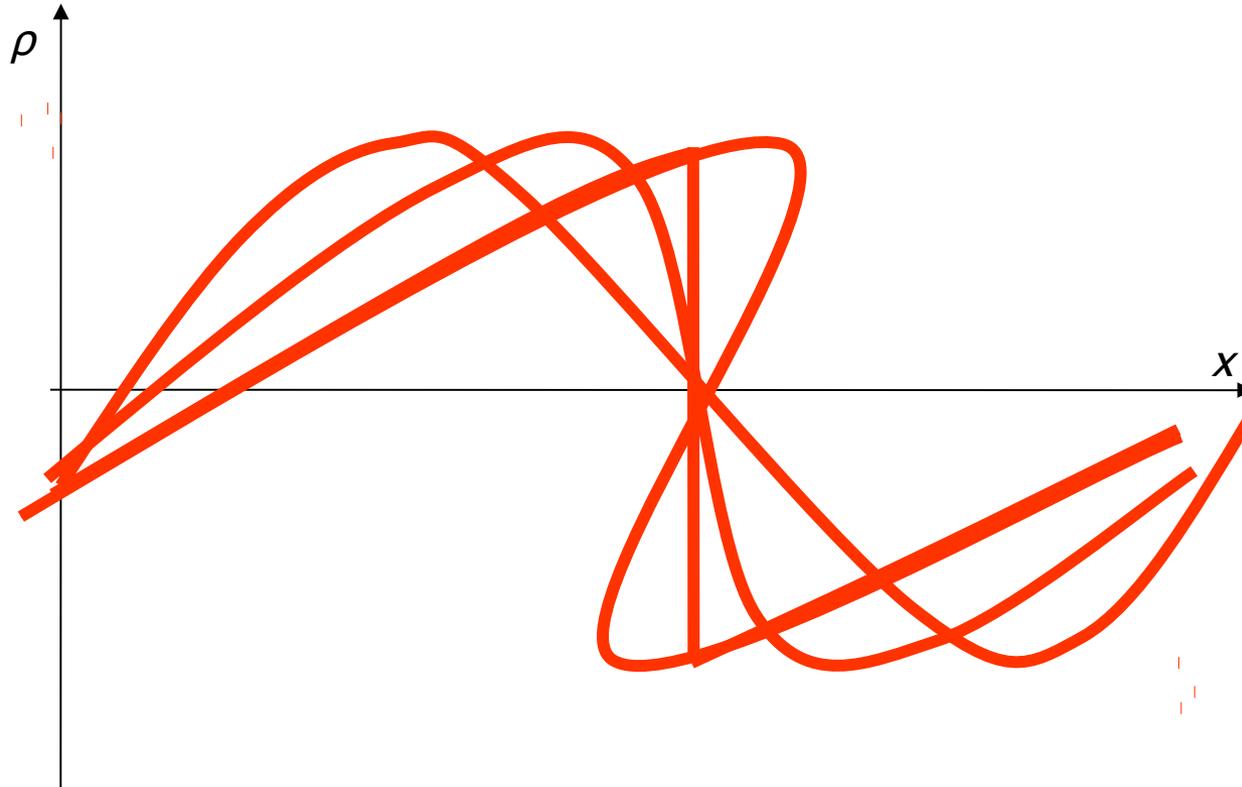
- ▶ Impulsbilanz

$$\frac{\partial \rho \vec{v}}{\partial t} = -\nabla \cdot (\rho \vec{v} \otimes \vec{v}) - \nabla P + \rho \vec{f}$$

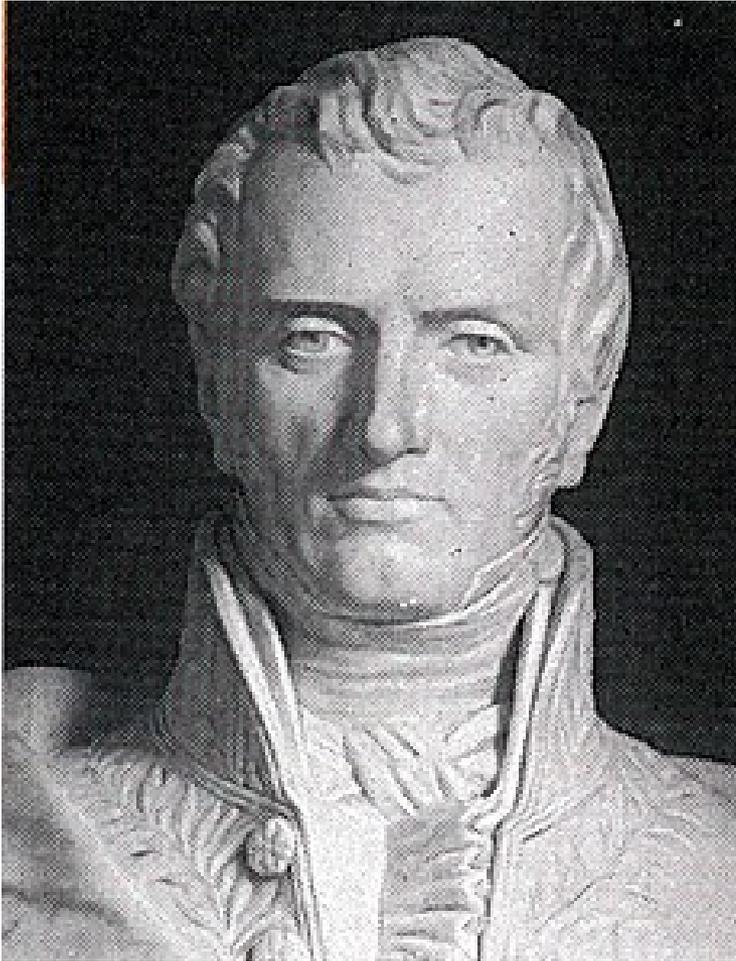
- ▶ Energiebilanz

$$\frac{\partial \rho e_{\text{tot}}}{\partial t} = -\nabla \cdot (\rho e_{\text{tot}} \vec{v}) - \nabla \cdot (P \vec{v}) + \rho \vec{v} \cdot \vec{f}$$

# Aufteilung von Schallwellen



# Navier, Stokes



Claude-Louis Navier (1785—1836)



George Gabriel Stokes (1818—1903)

# Navier-Stokes-Gleichung

- ▶ Impulsbilanz

$$\frac{\partial \rho \vec{v}}{\partial t} = -\nabla \cdot (\rho \vec{v} \otimes \vec{v}) - \nabla \cdot \underline{\underline{\Pi}} + \rho \vec{f}$$

- ▶ Drucktensor

$$\underline{\underline{\Pi}} = P \underline{\underline{I}} + \underline{\underline{\tau}}$$

Reynoldszahl:

$$Re = \frac{\rho v^2 / L}{\mu v / L^2} = \frac{\rho v L}{\mu}$$

- ▶ (viskoser) Spannungstensor

$$\underline{\underline{\tau}} = 2\mu \left\{ [(\nabla \vec{v}) + (\nabla \vec{v})^T] - \frac{1}{3}(\nabla \vec{v}) \underline{\underline{I}} \right\}$$

# Die Eulergleichungen

- ▶ Massenerhaltung

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\nabla \cdot (\rho \vec{v})$$

- ▶ Impulsbilanz

$$\frac{\partial \rho \vec{v}}{\partial t} = -\nabla \cdot (\rho \vec{v} \otimes \vec{v}) - \nabla P + \rho \vec{f}$$

- ▶ Energiebilanz

$$\frac{\partial \rho e_{\text{tot}}}{\partial t} = -\nabla \cdot (\rho e_{\text{tot}} \vec{v}) - \nabla \cdot (P \vec{v}) + \rho \vec{v} \cdot \vec{f}$$

# Rankine-Hugoniot-Sprungbedingungen

- ▶ kontinuierlicher Massenfluss

$$[\rho u] \equiv \rho_2 u_2 - \rho_1 u_1 = 0$$

- ▶ kontinuierlicher Impulsfluss

$$[\rho u^2 + P] = 0$$

- ▶ kontinuierlicher Energiefluss

$$[(\rho e_{\text{tot}} + P)u] = 0$$

mit  $\tilde{\varepsilon}_i = e_{\text{tot}} - \frac{1}{2}u^2$  (spezifische innere Energie)

$$\frac{1}{2}(u_1 - u_2)(u_1 + u_2) + \tilde{\varepsilon}_{i,1} - \tilde{\varepsilon}_{i,2} + \frac{P_1}{\rho_1} - \frac{P_2}{\rho_2} = 0$$

# Stoßwellen

- ▶ Massenfluss über Diskontinuität:

$$M = \rho_1 u_1 = \rho_2 u_2$$

- ▶  $M = 0$  Kontaktdiskontinuität
- ▶  $M \neq 0$  hydrodynamische Schockwelle  
(eigentlich: Verdichtungswelle oder Verdünnungswelle)

spezifisches Volumen  $\tau \equiv \frac{1}{\rho}$

Rayleigh-Linie  $M^2 = -\frac{P_1 - P_2}{\tau_1 - \tau_2}$

# Stosswellen

